

3. Dresdner Probabilistik - Workshop, 7-8 Oktober 2010

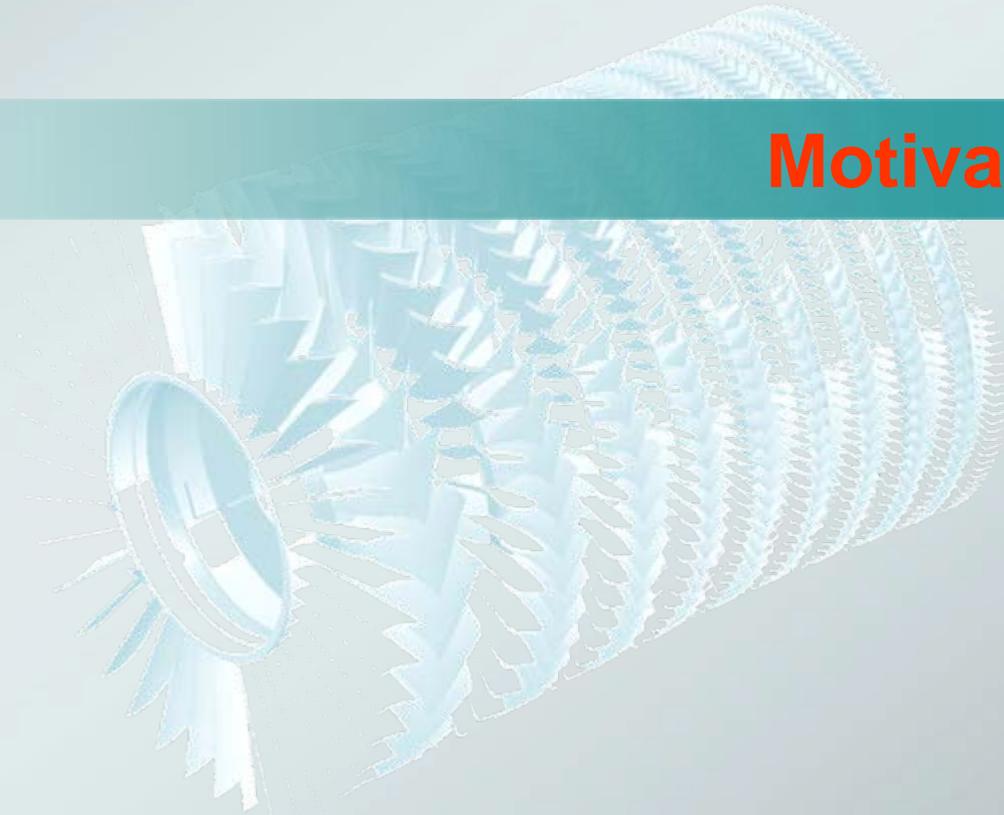
## Strategien zur Effizienzsteigerung Robustheitsbasierter Optimierungen

P. Flassig, M. Lockan, D. Bestle

- Motivation
- Reduktion des Suchraumes aufgrund von Optimierungsnebenbedingungen
- Adaptive robustheitsbasierte Antwortflächen-Optimierung
- Robuster Verdichterschaufelentwurf unter Berücksichtigung von Produktionsstreuungen
- Zusammenfassung

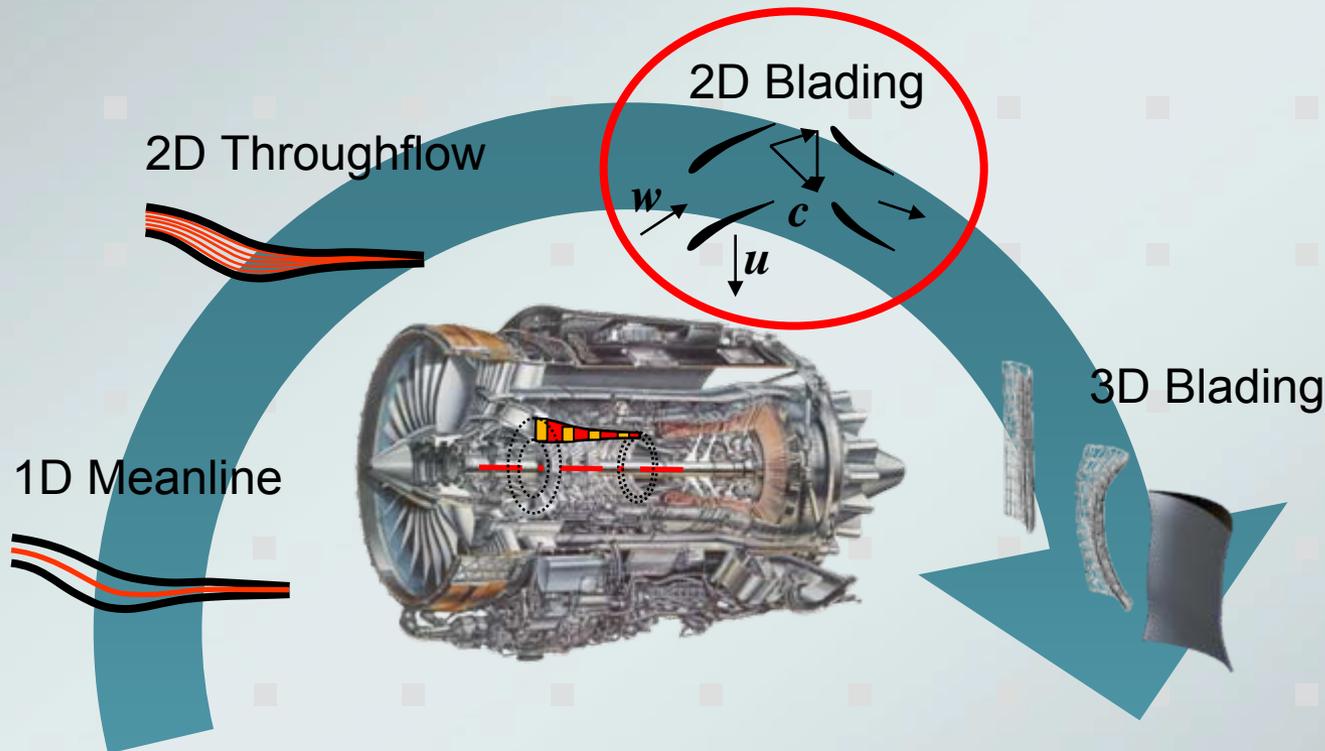


# Motivation



# Aerodynamischer Verdichtertentwurf

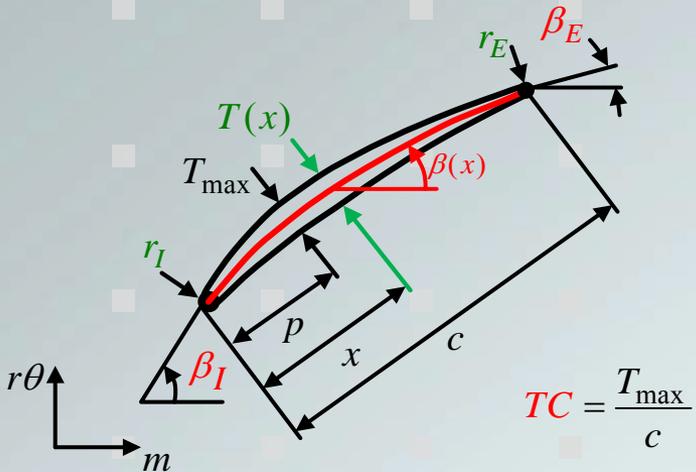
- die Auslegung eines technischen Systems ist häufig ein iterativer Prozess und erfordert eine Vielzahl an z.T. sehr zeitaufwändigen Analysen und Simulationen
- die aerodynamische Verdichterschaufelauslegung ist einer der wichtigsten Schritte des Verdichtertentwurfes und kann in vier Phasen unterteilt werden



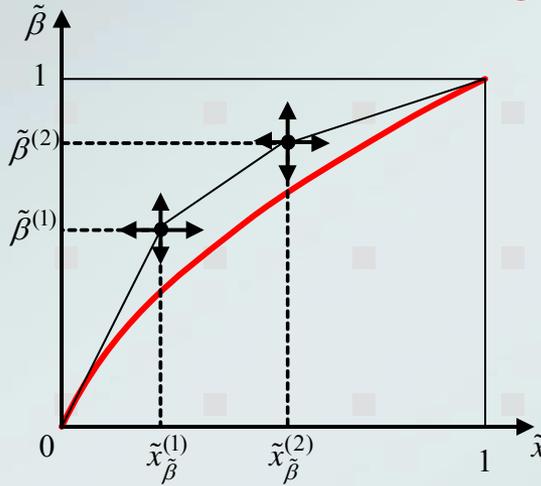
- Ziel ist eine effiziente und robuste 2D Auslegung um die Zahl der teuren 3D Berechnungen zu reduzieren und Parameterunsicherheiten zu berücksichtigen

# Definition des aerodynamischen Auslegungsproblems

- Beschreibung eines Verdichterschaufelschnittes



Skelettlinien-Winkel-Verteilung



$$\tilde{\beta}(\tilde{x}) = \frac{\beta_I - \beta(\tilde{x})}{\beta_I - \beta_E}$$

$$\tilde{x} = \frac{x}{c}$$

$$\tilde{x}_{\tilde{\beta}}^{(1)} = p^{(1)}$$

$$\tilde{x}_{\tilde{\beta}}^{(2)} = \tilde{x}_{\tilde{\beta}}^{(1)} + p^{(2)}(1 - \tilde{x}_{\tilde{\beta}}^{(1)})$$

$$\tilde{\beta}^{(1)} = p^{(3)}$$

$$\tilde{\beta}^{(2)} = \tilde{\beta}^{(1)} + p^{(4)}(1 - \tilde{\beta}^{(1)})$$

$$\mathbf{p} = [p^{(1)}, p^{(2)}, p^{(3)}, p^{(4)}, TC, \beta_I, \beta_E] \rightarrow \text{konstante Dickenverteilung}$$

- Übergang vom deterministischen zum robusten Optimierungsproblem

$$\min_{\mathbf{p} \in P} \omega \quad \text{mit} \quad P = \left\{ \mathbf{p} \in \mathbb{R}^7 \mid \mathbf{0} \leq \mathbf{p} \leq \mathbf{1}, \left| \alpha_{ex} - \alpha_{ex}^{soll} \right| \leq \varepsilon \right\}$$



$$\min_{\mathbf{p} \in P} \begin{bmatrix} \mu_{\omega} \\ \sigma_{\omega} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad P = \left\{ \mathbf{p} \in \mathbb{R}^7 \mid \mathbf{0} \leq \mathbf{p} \leq \mathbf{1}, P \left[ \left| \alpha_{ex} - \alpha_{ex}^{soll} \right| \geq \Delta \alpha_{ex}^{zul} \right] \leq \varepsilon \right\}$$

- globale Optimierung erfordert meist sehr hohe Zahl an zeitaufwändigen Funktionsauswertungen, besonders bei der Verwendung von MOGA's
- wird zusätzlich die statistische Bewertung eines Entwurfes benötigt werden effizienzsteigernde, alternative Strategien zur Optimierung notwendig

Motivation

## Reduktion des Suchraumes aufgrund von Optimierungsnebenbedingungen



# Struktur des Entwurfsraumes

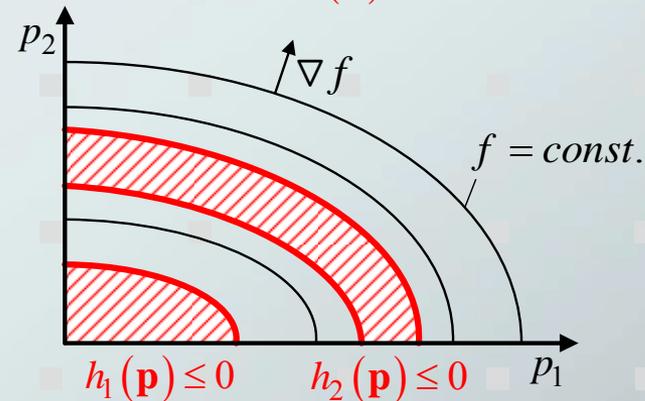
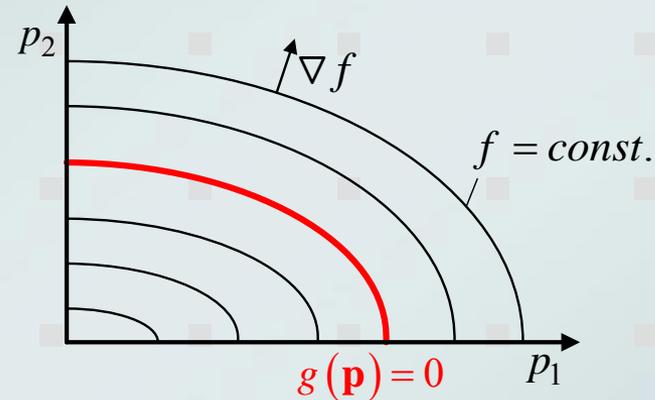
- durch Abhängigkeiten der Entwurfparameter selbst oder aufgrund von Optimierungsnebenbedingungen kann die Dimension des Entwurfsraumes und der damit verbundene Suchaufwand reduziert werden

- Gleichungsnebenbedingungen reduzieren die Dimension des Entwurfsraumes

zulässiger Suchraum:  $g(\mathbf{p}) = 0$

- Ungleichungsnebenbedingungen schränken den Entwurfsraum ein, reduzieren aber nicht dessen Dimension

zulässiger Suchraum:  $h(\mathbf{p}) \leq 0$



- zunächst muss geprüft werden, ob eine Dimensionsreduktion möglich ist, oder zumindest der Entwurfsraum eingeschränkt werden kann
- danach sind alternative Entwurfparameter zu definieren welche den zulässigen Suchraum möglichst vollständig beschreiben

# Effektive Dimension des Suchraumes

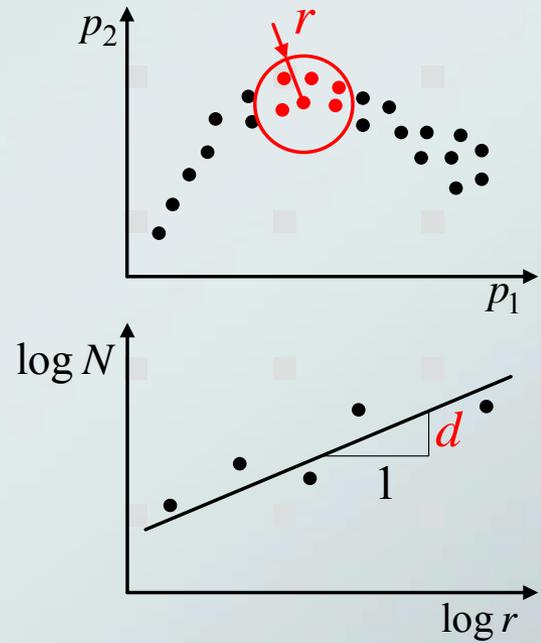
• die effektive Dimension entspricht der minimalen Zahl an Entwurfsparametern welche notwendig sind um den zulässigen Suchraum vollständig zu beschreiben

- Correlation Dimension Estimator
  - basiert auf Tatsache, dass  $N(r) \sim r^d$
  - berechnet sich aus endlicher Stichprobe  $\mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^D, i = 1, \dots, n$

$$N(r) = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n c_{ij} \quad \text{mit} \quad c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\| \leq r \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$d = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log N(r)}{\log r}$$

→ Näherung durch lineare Regression



• Beispiel der Verdichterschaufeloptimierung

- DoE mit 1000 Elementen (oLH)
  - 69 Entwürfe entsprechend des Optimierungsproblems zulässig
- erneute DoE um zulässigen Punkt
  - 373 Entwürfe entsprechend des Optimierungsproblems zulässig

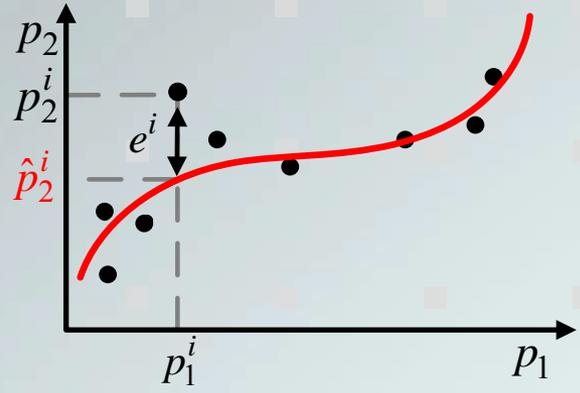
➡  $d \approx 6.2258$

➡  $d \approx 6.7102$

➤ keine Dimensionsreduktion des Suchraumes möglich

# Superposition einer Approximationsfunktion

- nichtlineare Approximation auf der Grundlage zulässigen Lösungen
  - jeweils ein Entwurfparameter wird als dominiert von den übrigen angenommen, übrigen zum Modellaufbau verwendet



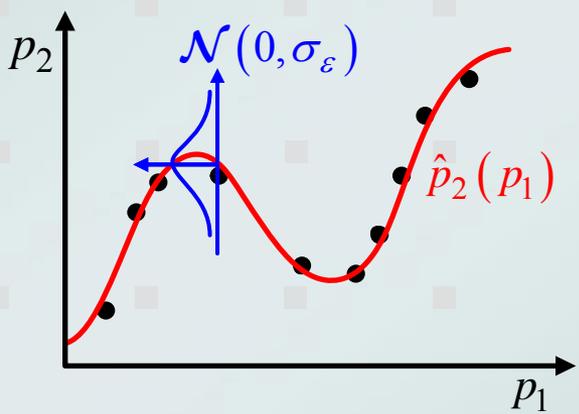
- Bewertung der Approximation, z.B.

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (\hat{p}_2^i(p_1^i) - \bar{p}_2)^2}{\sum_{i=1}^N (p_2^i - \bar{p}_2)^2} \quad \text{mit} \quad \bar{p}_2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_2^i$$

$$\sigma_\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (e^i - \bar{e})^2} \quad \text{mit} \quad \bar{e} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^i$$

- Parameter mit großen  $R^2$  bzw. kleinen  $\sigma_\varepsilon$  werden als dominiert angesehen

- alternative Interpretation dominierter Parameter



- probabilistische Wichtung des Entwurfsraums, keine Einschränkung

$$\tilde{p}_2 = \int_{-\infty}^{\tilde{p}_2} \frac{1}{\sigma_\varepsilon \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{\sigma_\varepsilon}\right)^2\right) dx, \quad \tilde{p}_2 \in [0,1]$$

$$p_2 = \hat{p}_2(p_1) + \tilde{p}_2(\tilde{p}_2, \sigma_\varepsilon)$$

- $\tilde{p}_2$  als Entwurfparameter

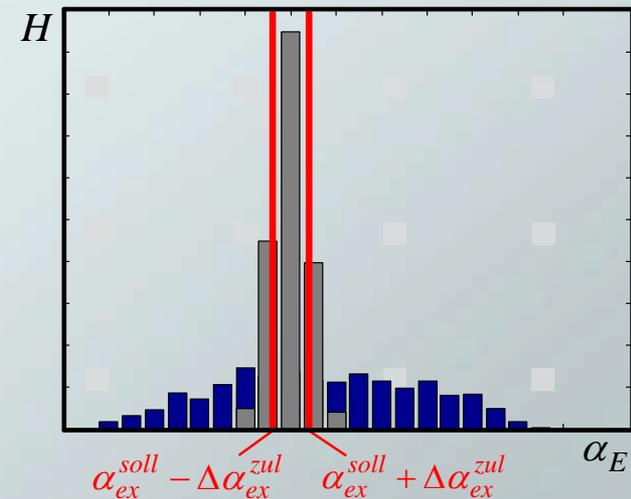
- Beispiel der Verdichterschaufeloptimierung
  - Bewertung der einzelnen Approximationen



	$p^{(1)}$	$p^{(2)}$	$p^{(3)}$	$p^{(4)}$	$TC$	$\beta_I$	$\beta_E$
$R^2$	0.3924	0.2748	0.6121	0.8064	0.3841	0.3452	0.9455
$\sigma_\varepsilon$	0.2412	0.2236	0.1683	0.1105	0.2517	0.1931	0.027

- Variation von  $\beta_E$  kann sehr gut von den anderen Parametern beschrieben werden
- alternative Parametrisierung
 
$$\mathbf{p} = [p^{(1)}, p^{(2)}, p^{(3)}, p^{(4)}, TC, \beta_I, \check{\beta}_E] \quad \text{mit} \quad \check{\beta}_E = \hat{\beta}_E(p^{(1)}, \dots, p^{(4)}, TC, \beta_I) + \tilde{\beta}_E(\check{\beta}_E, \sigma_\varepsilon)$$
- vergleichende DoE beider Parametrisierungen

oLH DoE 1000	Designs konvergiert	Designs zulässig
Originale Parametrisierung	851	69
Alternative Parametrisierung	942	542





## Adaptive robustheitsbasierte Antwortflächen-Optimierung



# Methodik einer Antwortflächen-Optimierung

$\min_{p \in P} y(p)$  → exakte Funktion unbekannt oder Auswertung sehr aufwändig

auswerten ausgewählter Entwürfe um Antwortfläche aufzubauen

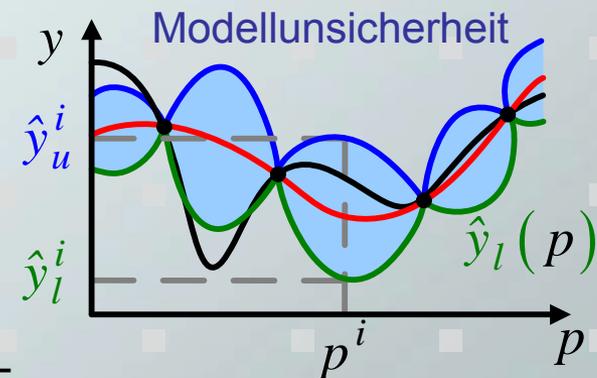
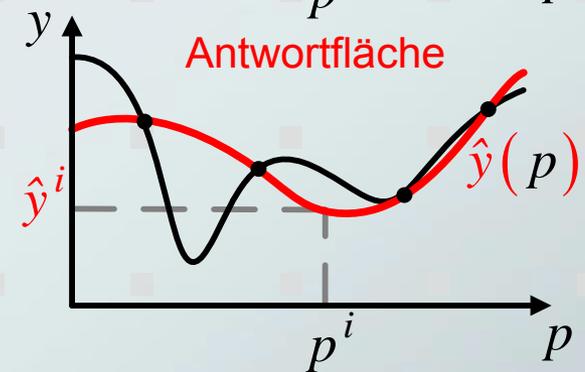
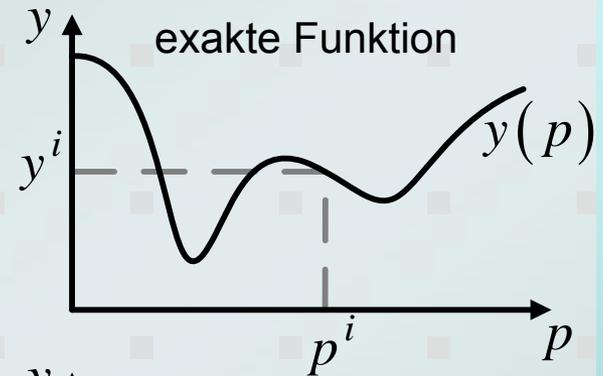
$\min_{p \in P} \hat{y}(p)$  → Antwortfläche stark abhängig von Stützstellen, Optimierung kann zu lokalen Optima führen

Berücksichtigung von Modellunsicherheiten

$$\min_{p \in P} \hat{y}_l(p) \text{ mit } \hat{y}_l(p) = \hat{y}(p) - \hat{\varepsilon}(p)$$

→ Minima definiert vielversprechende Update-Position

- Update-Prozess fortführen bis Unsicherheit am Minima klein genug
- Methodik kann auch auf Mehrkriterien- und Robuste-Optimierungsprobleme angewendet werden

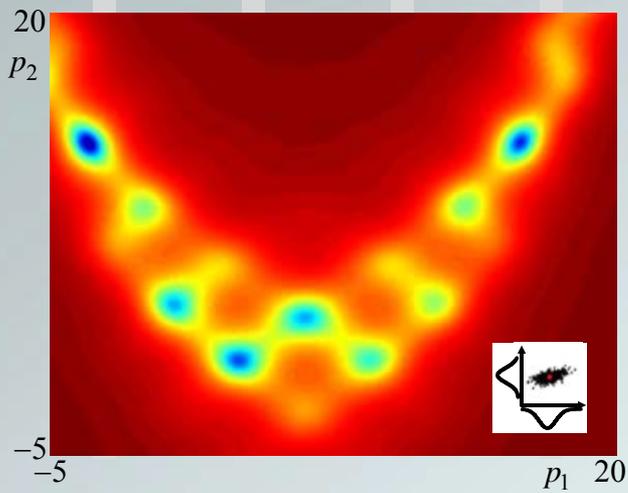


# Beispiel robuste Antwortflächen-Optimierung

- RCOS Testfunktion

$$f(\mathbf{p}) = \frac{1}{a(p_2 - bp_1^2 + cp_1 - d)^2 + e(1+f)\cos p_1 \cos p_2 + \log(p_1^2 + p_2^2 + 1) + e}$$

mit  $a=1, b=5.1/(4\pi^2), c=5/\pi, d=6, e=10, f=1/8\pi$

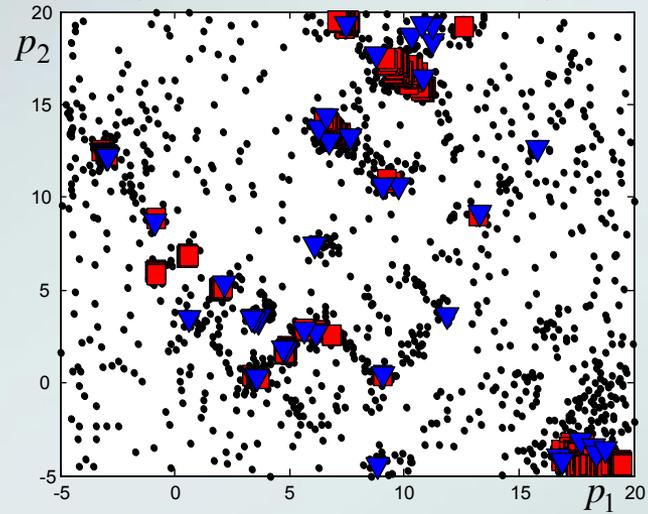


- Robustes Optimierungsproblem

$$\min_{\mathbf{p} \in P} \begin{bmatrix} \mu_f \\ \sigma_f \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad P = \left\{ \mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \mid -5 \leq p_1, p_2 \leq 20 \right\}$$

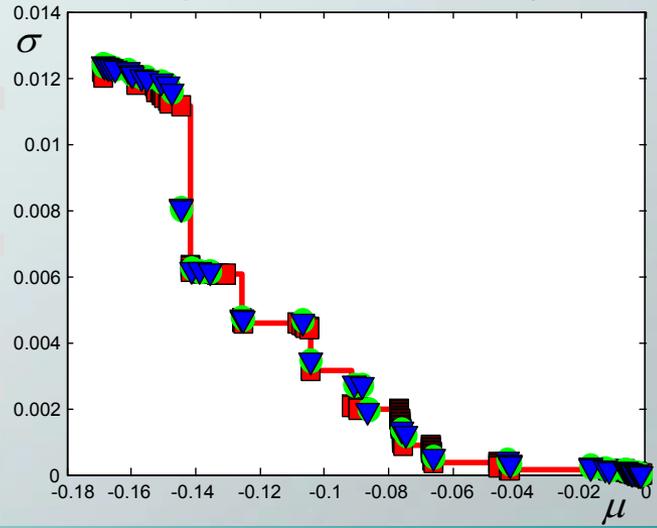
- Ergebnisse im Entwurfsraum

Designauswertungen, nicht-dominierte Entwürfe (direkt), nicht-dominierte Entwürfe (Antw.-Opt.)



- Ergebnisse im Kriterienraum

Pareto-Fronten aus direkter, antwortflächenbasierter und direkt überprüfter antw. robusten Optimierung



# Robuster Verdichterschaufelentwurf unter Berücksichtigung von Produktionsstreuungen



# Robuste Optimierung eines Schaufelschnittes

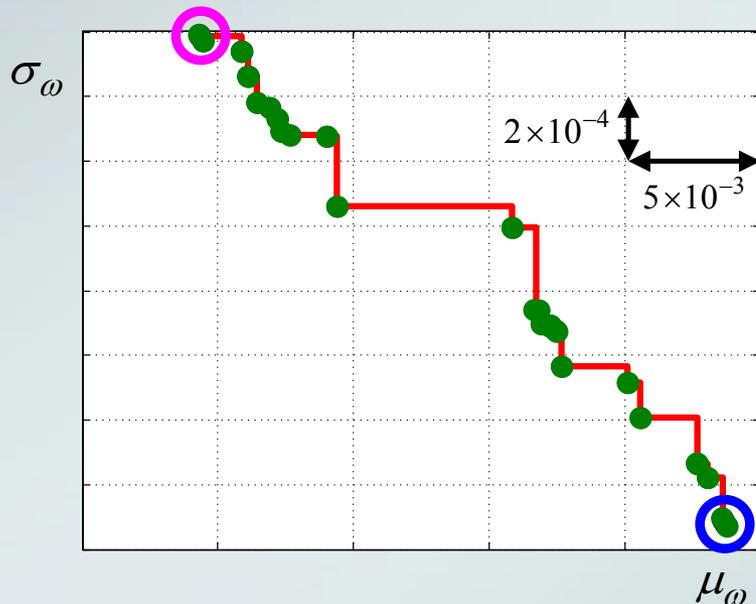
## • Robustes Optimierungsproblem

$$\min_{\mathbf{p} \in P} \begin{bmatrix} \mu_\omega \\ \sigma_\omega \end{bmatrix}$$

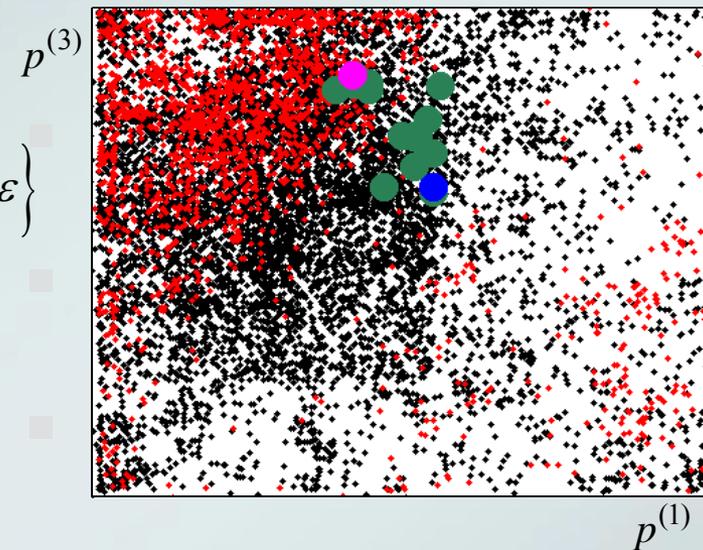
$$\text{mit } P = \left\{ \mathbf{p} \in \mathbb{R}^7 \mid \mathbf{0} \leq \mathbf{p} \leq \mathbf{1}, P_\alpha \left[ \left| \alpha_{ex} - \alpha_{ex}^{soll} \right| \geq \alpha_{ex}^{zul} \right] \leq \varepsilon \right\}$$

- Streuung der Entwurfsparameter nicht gemessen, aber an reale Messungen angepasst

## • Ergebnisse im Kriterienraum



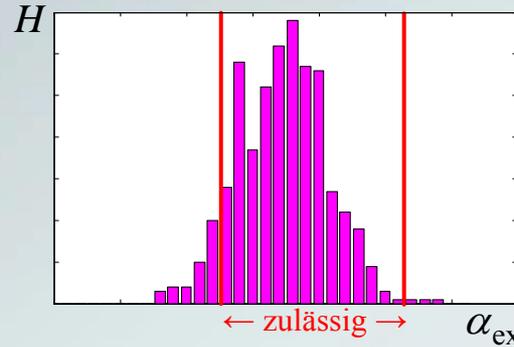
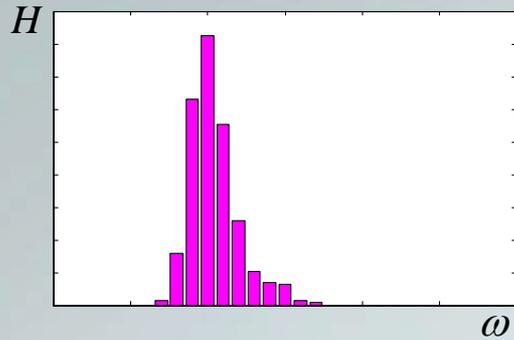
## • Ergebnisse im Entwurfsraum



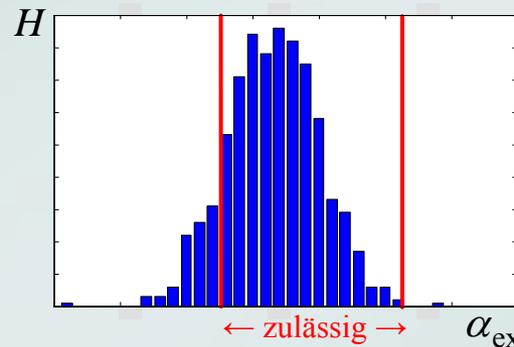
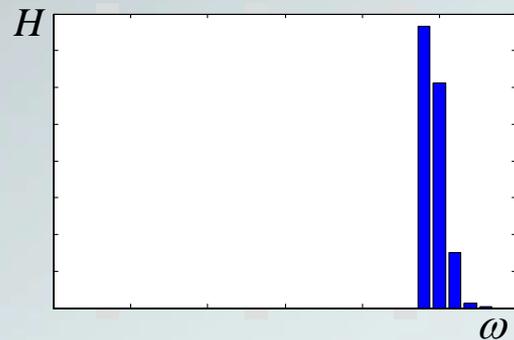
Designauswertungen,  
nicht-konvergierte Entwürfe,  
nicht-dominierte Entwürfe,  
minimaler Mittelwert des Verlustes,  
minimale Standardabweichung des Verlustes

# Nachgerechnete Ergebnisse der Optimierung

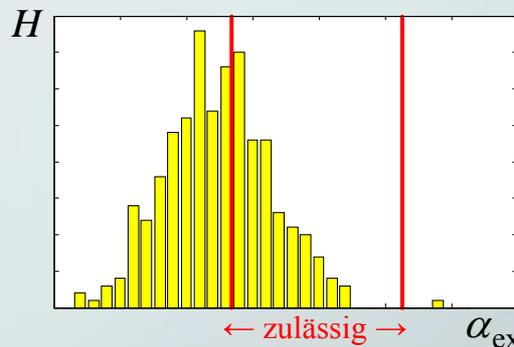
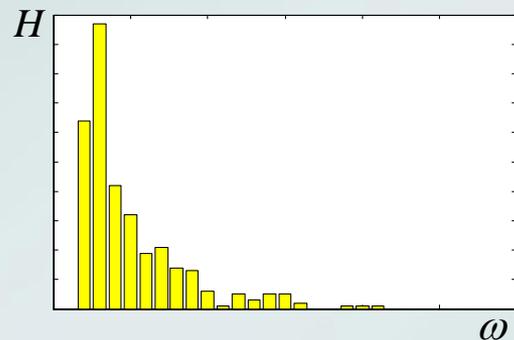
- LHS mit 1000 Auswertungen



- Entwurf für minimalen Erwartungswert des Verlustes
- 70 % konvergiert
- davon 89.66% zulässig



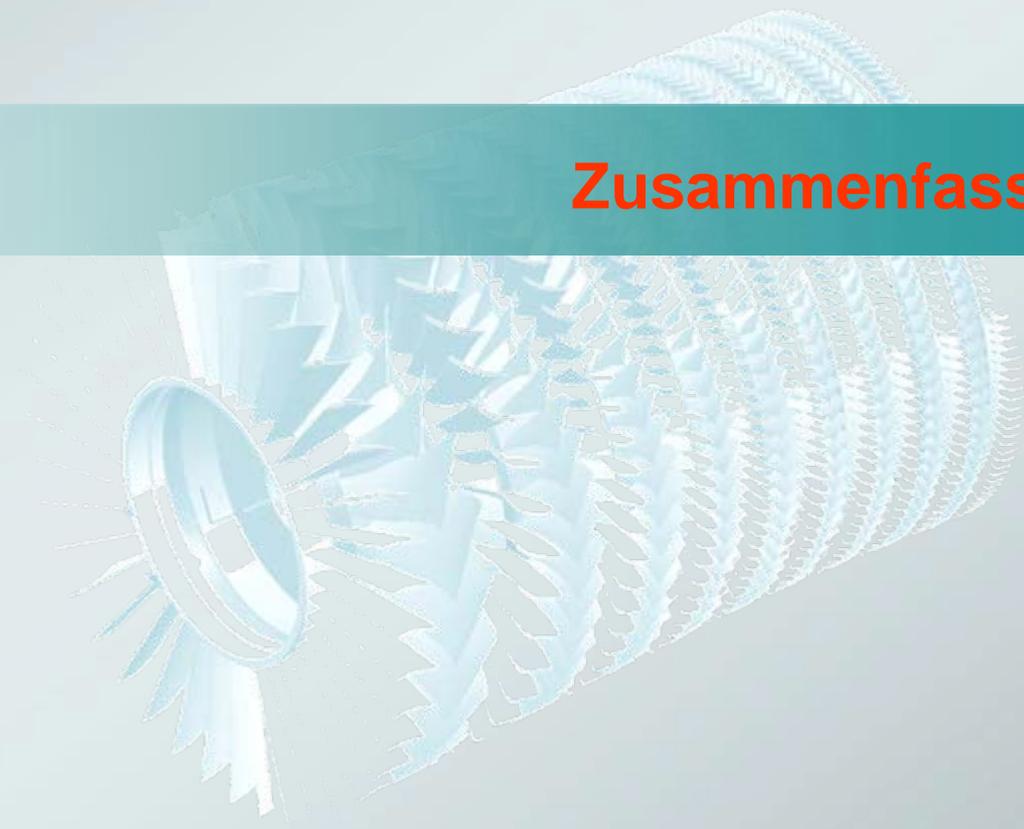
- Entwurf für minimaler Varianz des Verlustes
- 100 % konvergiert
- davon 84.66% zulässig



- deterministisches Minima des Verlustes
- 42% konvergiert
- davon 43.67% zulässig



## Zusammenfassung



# Zusammenfassung

- Globale robuste Optimierung von komplexen technischen Systemen erfordert enormen rechnerischen Aufwand
- deterministische Optimierung führt häufig zu Lösungen an den Grenzen des zulässigen Bereiches und damit zu hohen Ausfallwahrscheinlichkeiten im Falle unsicherer Entwurfsgrößen
- Herkömmliche Optimierungsstrategien lassen sich nicht direkt zur robusten Optimierung erweitern, alternative und effektivere Ansätze werden notwendig
- Optimierungsnebenbedingungen und Abhängigkeiten der Entwurfparameter reduzieren den zulässigen Entwurfsraum
- Ziel einer effizienten Parametrisierung ist die Beschreibung des kompletten zulässigen Bereiches mit so wenig Parametern wie möglich
- Antwortflächenverfahren mit Schätzung der Approximationsgenauigkeit erlauben Entkopplung von unstrukturierter globaler Optimierung genetischer Algorithmen und somit effektiven Einsatz von Systemauswertungen
- Iterative Entwicklung der Antwortfläche im Bereich der robusten Optima von Start an der Optimierung